Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj – Bouira –
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département d'Informatique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند الحاج - البويرة
كلية العلوم والعلوم التطبيقية

Module : probabilités et statistique

Chapitre ③ : principales lois de probabilité

Les lois les plus utilisées sont des lois discrètes ou à densité.

I/ Lois discrètes usuelles :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1) Loi de Bernoulli :

De toute expérience aléatoire on peut s'intéresser à deux issues sont possibles :
« succès » avec probabilité $p \in [0,1]$
et « échec » avec probabilité $1-p$.
La loi de Bernoulli de paramètre p est la loi de la variable aléatoire X qui prend les valeurs 1 pour « succès » et 0 pour « échec ». Donc

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=0) = 1-p$$

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

Ici: $X(\Omega)=\{0,1\}$

Ou bien la loi de Bernoulli est:

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}, \quad \text{avec } k\in\{0,1\}$$

On notera: $X \rightsquigarrow B(p)$

X suit la loi de Bernoulli

proposition: Si $X \rightsquigarrow B(p)$, alors

$$E(X)=p \quad \text{et} \quad V(X)=p(1-p)$$

preuve:

$$E(X)=\sum_{k=0}^{1} k\,P(X=k) = 0\times P(X=0)+1\times P(X=1)$$
$$= p$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{1} k^2 P(X=k) = 0^2\times P(X=0)+1^2\times P(X=1)$$
$$=p$$

et on a:

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=p-p^2=p(1-p)$$

2/ loi Binomiale:

On procède à n répétitions indépendantes de l'expérience de Bernoulli, on peut construire une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale de paramètres n et p où p le paramètre de Bernoulli.

Donc la loi Binomiale est définie par :

$$f(k) = P(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$$

où $\quad k \in X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

et $\quad C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

On notera : $X \leadsto B(n, p)$

Remarque :

1/ $f(k)$, $\forall k \geq 0$

2/ En utilisant la formule de Newton il est facile de montrer que la fonction f représente une de probabilité

En effet,

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1^n = 1$$

La formule de Newton est :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k y^{n-k}$$

Proposition : Si $X \leadsto B(n, p)$, alors :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p)$$

preuve :

1/ On a, $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

On utilise le changement de variable suivant :

$$k-1 = l, \quad k \longrightarrow 1, \; l \longrightarrow 0$$

$$k \longrightarrow n, \; l \longrightarrow n-1$$

d'où

$$E(X) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n!}{l!\,(n-l-1)} p^{l+1} (1-p)^{n-l-1}$$

$$= n \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!\,(n-1-l)!} p^{l+1} (1-p)^{n-1-l}$$

$$= np \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!\,(n-1-l)!} p^{l} (1-p)^{n-1-l}$$

$$= np\,(p+1-p)^{n-1} = np \times 1^{n-1}$$

$$= np.$$

Le moment d'ordre 2 est :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \frac{n!}{\ell!\,(n-\ell-1)!} p^{\ell+1} (1-p)^{n-\ell-1}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \frac{n!}{\ell!\,(n-\ell-1)!} p^{\ell+1} (1-p)^{n-\ell-1} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{n!}{\ell!\,(n-\ell-1)!} p^{\ell+1} (1-p)^{n-\ell-1}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{n!}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!} p^{\ell+1} (1-p)^{n-\ell-1} + np \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell!\,(n-1-\ell)!} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j!\,(n-2-j)!} p^{j+2} (1-p)^{n-j-2} + np\,(p+1-p)^{n-1}$$

$$= n(n-1)p^2 (p+1-p)^{n-2} + np \times 1^{n-1}$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

Donc

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$= -np^2 + np = np(1-p).$$

La fonction génératrice de $X \rightsquigarrow B(n, p)$ est :

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{kt} f(k) \quad , \text{où } t \in \mathbb{R}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{kt} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^t)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (pe^t + 1 - p)^n$$

Exemple : On lance un dé 100 fois.

Quelle la probabilité pour obtenir le chiffre 3, 9 fois ?

On a. $n = 100$

A l'événement « obtenu le chiffre 3 »

et on a $P(A) = \frac{1}{6} = p \Rightarrow 1 - p = \frac{5}{6}$

On pose : X est le nombre pour obtenir le A.

Donc $X \rightsquigarrow B(100, \frac{1}{6})$

$$f(k) = P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= C_{100}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k} \quad , k = 0, 1, \dots, 100$$

d'où $P(X=9) = C_{100}^9 \left(\frac{1}{6}\right)^9 \left(\frac{5}{6}\right)^{91}$.

3) Loi hypergéométrique:

Supposons que une urne contenant n boules, dont h boules rouges.
On tire en une seule fois r boules.
on note par X : « le nombre de boules rouges parmis les r tirées »
on a alors la loi de X est :

$$f(k) = P(X=k) = \frac{C_h^k \, C_{n-h}^{r-k}}{C_n^r}$$

avec $0 \leq h \leq n$, $0 \leq r \leq n$ et $0 \leq k \leq \min(h,r)$

donc on notera $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(n,h,r)$

Proposition: Si $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(n,h,r)$, alors:

$$E(X) = \frac{rh}{n} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{rh}{n}\left(1-\frac{h}{n}\right)\frac{n-r}{n-1}.$$

4) Loi géométrique:

On dit qu'une variable aléatoire X définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suit une loi géométrique de paramètre p, notée $X \rightsquigarrow G(p)$ si $X(\Omega) = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}^*$

et sa la loi de X est donnée par :

$$f(k) = P(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \text{ où } k = 1, 2, \ldots$$

Exemple : On lance une pièce de monnaie.

On note par : X : « Le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier pile »

On pose $w_1 = \{P\}$, $w_2 = \{F\}$ et $P(w_1) = p$.

Il est clair que $X(\Omega) = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}^*$

$$P(X=1) = P(\{w \in \Omega / X(w) = 1\}) = P(w_1) = p$$

$$P(X=2) = P(\{F, P\}) = p(1-p)$$

$$P(X=3) = P(\{F, F, P\}) = p(1-p)^2$$

d'où $P(X=k) = p(1-p)^{k}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

proposition : si $X \sim G(p)$, alors :

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

preuve :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\, p(1-p)^{k-1}$$

$$= p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = p\left(\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k}\right)'$$

Donc $E(X) = p\left(\frac{x}{1-x}\right)'$, avec $x = 1-p$

$$= p\,\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

* $E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1}$

$= p\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (1-p)^{k-1}$. On pose $x = 1-p$

$$= p\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1-1)k\,x^{k-1}$$

$$= p\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)k\,x^{k-1} - p\sum_{k=1}^{+\infty} k\,x^{k-1}$$

$$= p\left(\sum_{k=1}^{+\infty} x^{k+1}\right)'' - p\left(\sum_{k=1}^{+\infty} x^{k}\right)'$$

$$= p\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' - p\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$= p\left(\frac{1+x}{(1-x)^3}\right) = \frac{2-p}{p^2}$$

d'où

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1-p}{p^2}$$

5/ Loi de poisson

Définition: on dit qu'une variable aléatoire X définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suit la loi de poisson de paramètre λ $(\lambda > 0)$, notée $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$ et sa la loi de probabilité définie par:

$$f(k) = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

Proposition: Soit $\lambda > 0$. Si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors:

$$E(X) = \lambda \text{ et } V(X) = \lambda$$

Preuve:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!}, \text{ avec } j = k-1$$

$$= \lambda\, e^{-\lambda} \times e^{\lambda}$$

$$= \lambda$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) \frac{\lambda^j}{j!} \quad , \text{avec } j = k-1$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{j=0}^{+\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right]$$

$$= \lambda E(X) + \lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

D'où $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Remarque : Le tableau suivant exprime la fonction génératrice des moments et la fonction caractéristique de quelques variables aléatoires discrètes usuelles :

v.a.d	$M_X(t)$	$\varphi_X(w)$, $t = iw$, $i^2 = -1$
$X \rightsquigarrow B(p)$	$1 - p + pe^t$	$1 - p + pe^{iw}$
$X \rightsquigarrow B(n,p)$	$(1-p+pe^t)^n$	$(1-p+pe^{iw})^n$
$X \rightsquigarrow G(p)$	$\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\dfrac{pe^{iw}}{1-(1-p)e^{iw}}$
$X \rightsquigarrow P(\lambda)$	$e^{-\lambda(1-e^t)}$	$e^{-\lambda(1-e^{iw})}$

Approximation d'une loi Binomiale par une loi de poisson

Si $p < 0{,}1$, et $n \geq 30$, alors on peut approximer la loi Binomiale $B(n, p)$ par la loi de poisson de paramètre $\lambda = np$

Exemple:

Si $X \rightsquigarrow B(2000, \frac{1}{1000})$, alors la loi de X peut s'approximer par la loi de Poisson $X \rightsquigarrow P(\lambda)$, où $\lambda = np = 2000 \times \frac{1}{1000} = 2$

d'où $p(X = k) = e^{-2} \frac{2^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$

Approximation d'une loi Hypergéométrique par une loi Binomiale:

Si $X \rightsquigarrow H(n, h, r)$ et si que n assez grand (i.e., $n \longrightarrow +\infty$) on peut approximer la loi de X par loi Binomiale de paramètre r et $p = \frac{h}{n}$

(i.e., $X \rightsquigarrow B(r, \frac{h}{n})$) et on note $H(n, h, r) \simeq B(r, \frac{h}{n})$.